17/5/2017

## Μέτρα συσχέτισης

$(x,y)$ τ.μ. ποσοτικές : $Cov(x,y) = E(x-Ex)(y-Ey) = E(xy)-(Ex)(Ey)$, $\overbrace{\rho = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{VarX\,VarY}}}^{-1 \leq \rho \leq 1}$

$(x_i,y_i)$, $i=1,\dots,n$ : Δειγματικός συντελεστής συσχέτισης : $r = r(x,y) = \underbrace{\frac{\sum^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2 \sum(y_i-\bar{y})^2}}}_{-1 \leq r \leq 1}$ *

$H_0 : \rho = 0$ v $H_\alpha : \rho \neq 0$ & $t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \sim t_{n-2}$. $|t| \geq t_{\alpha/2, n-2}$

## Συντελεστής Συσχέτισης του Spearman :

Έστω $R(x_i)$ & $R(y_i)$ $i=1,\dots,n$ οι τάξεις των μετρήσεων

$r_s = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R(x_i)-R(\bar{x}))(R(y_i)-R(\bar{y}))}{\sqrt{\sum(R(x_i)-R(\bar{x}))^2 \sum(R(y_i)-R(\bar{y}))^2}}}_{-1 \leq r_s \leq 1}$, $R(\bar{x}) = \frac{\sum R(x_i)}{n}$, $R(\bar{y}) = \frac{\sum R(y_i)}{n}$

$H_0 : \rho = 0$ v $H_\alpha : \rho \neq 0$.

$|r_s| \geq r_{\alpha/2} \leftarrow$ δίπλευρο ‖ $t = r_s\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \overset{\text{προσεγ.}}{\sim} t_{n-2}$

$r_s \geq r_\alpha \leftarrow$ μονόπλευρο

Αν $d_i = R(x_i) - R(y_i)$, $\sum d_i = 0$.

Τότε $r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$

## Παραδειγμα 1 (7.10):

(8.2, 8.7), (9.6, 9.6), (7, 6.9), (9.4, 8.5), (10.9, 11.3), (7, 1, 7.6)

$H_0: p=0$ v $H_a: p\neq 0$

**Λύση**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$: | 8.2 | 9.6 | 7 | 9.4 | 10.9 | 7.1 |
| $y_i$: | 8.7 | 9.6 | 6.9 | 8.5 | 11.3 | 7.6 |
| $R(x_i)$: | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 |
| $R(y_i)$: | 4 | 5 | 1 | 3 | 6 | 2 |
| $d_i$: | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Τοτε θα ειναι:

$$r_s = 1-\frac{6\sum d_i^2}{6(6^2-1)} = 1-\frac{6(1^2+1^2)}{6(31-1)} = 0.94$$

κρισιμη περιοχή $|r_s| \geq r_{\alpha/2} (= r_{0.005}) = 0.886$.

Απορριπτεται Ho.

$$\left( t = r_s\sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} = 5.51 > 2.776 \;(= t_{0.05,4}) \quad \text{Απορριπ. Ho} \right)$$

## Παραδειγμα 2 : $(\overset{\text{Ελληνικα}}{x}, \overset{\text{Ιστορια}}{y})$ : (Β,Α), (Α,Β) (Γ,Γ) (Β,Γ) (ΒΒ) (ΔΕ) (ΕΔ) (ΓΓ)

$H_0: p=0$ v $H_a: p\neq 0$ & $n=8$, $\alpha=0.05$

**Λύση**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$: | Β | Α | Γ | Β | Β | Δ | Ε | Γ |
| $y_i$: | Α | Β | $\overset{4}{Γ}$ | $\overset{8}{Γ}$ | Β | Ε | Δ | $\overset{2}{Γ}$ |
| $R(x_i)$: | 6 | 8 | 3.5 | 6 | 6 | 2 | 1 | 3.5 |
| $R(y_i)$: | 8 | 6.5 | 4 | 4 | 6.5 | 1 | 2 | 4 |
| $d_i$: | -2 | 1.5 | -0.5 | 2 | -0.5 | 1 | -1 | -0.5 |

Για επαληθευση $\boxed{\sum d_i = 0}$

$$r_s = 1-\frac{6\sum d_i^2}{8(8^2-1)} = 1-\frac{6*13}{8*63} = 0.845$$

κρισιμη περιοχή : $|r_s| \geq r_{0.025} (=0.731)$

Απορ. Ho δηλ. δεν υπαρχει σχεση μεταξύ των επιδοσεων.

Για x μετρήσεις: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ ← 39.5

Για Y μετρήσεις: $g_1 = 2$, $g_2 = 3$ ← 39.5

και:

$$r_s = \frac{195 - \frac{36 * 36}{8}}{\sqrt{39.5 * 39.5}} = 0.835 \quad \cancel{\text{απορ. Ho}}$$

$$\text{και } t = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} = \begin{cases} 3.871 \\ 3.717 \end{cases} > 2.447 = t_{0.025,6} \quad \text{Απορ. Ho.}$$

## Kendell's τ:

$(x_i, y_i)$ $i = 1, \ldots, n$.

Ορισμός: <u>Σύμφωνα ζεύγη</u>: $(x_i < x_j, y_i < y_j)$ (# $n_c$)

$(x_i > x_j, y_i > y_j)$

<u>Ασύμφωνα ζεύγη</u>: $(x_i < x_j, y_i > y_j)$ (# $n_D$)

$(x_i > x_j, y_i < y_j)$

$$\tau = \frac{n_c - n_D}{n(n-1)/2}, \quad -1 \le \tau \le 1.$$

Διατάσουμε τις x μετρήσεις

Αντιστοιχούμε τις Y μετρήσεις

Τιμές Y μικρότερες από τη συγκεκριμένη → ασύμφωνα ζεύγη

-11- μεγαλύτερες -11- -11- → σύμφωνα ζεύγη.

Παρ. 1 (Παρ. 63 σελ. 118 Μπατσίδης)

$$\tau = \frac{n_c - n_D}{n(n-1)/2} = -0.51, \quad r_s = \frac{1 - 6 * 20 * 50}{10(10^2 - 1)} = -0.603.$$